

Teoría de Juegos

Rómulo A. Chumacero

Motivación

- Teoría de juegos es una herramienta analítica para modelar la toma de decisiones estratégicas interdependientes
- El deporte presenta un área obvia para evaluar implicancias de teoría porque la estructura es simple y definida
- La teoría ayuda a entender cómo los equipos y jugadores toman decisiones, considerando las posibles acciones de sus oponentes

Tipologías de juegos

- Simultáneos / secuenciales
- De una vez / repetidos / dinámicos
- Cooperativos / no cooperativos
- Suma cero / no suma cero
- Estrategias puras o mixtas

Componentes

- Jugadores
- Estrategias
- Pagos (payoff)
- Equilibrio de Nash
- Representación (forma normal, extensa, característica)

Definiciones

- Juego
 - Un modelo formal de interacción estratégica entre dos o más agentes (jugadores)
 - Cada jugador elige una estrategia anticipando las posibles elecciones del otro
 - El resultado (payoff) depende de las estrategias combinadas
- Componentes
 - Jugadores: agentes racionales que toman decisiones
 - Estrategias:
 - * Puras: elegir una acción con certeza
 - * Mixtas: asignar una probabilidad a cada acción posible
 - Pagos (payoffs): utilidad o resultado para cada jugador en cada combinación de estrategias

Definiciones

- Juegos de suma cero: lo que un jugador gana, el otro lo pierde.
- Representación en una matriz de pagos (forma normal)
- Equilibrio de Nash
 - Ningún jugador puede mejorar su resultado cambiando unilateralmente de estrategia
 - En juegos de suma cero, el equilibrio puede requerir estrategias mixtas (jugadores aleatorizan para hacer impredecible su acción)
 - Propiedad clave: indiferencia: el jugador debe estar indiferente entre las acciones en su mezcla óptima
 - Las probabilidades de equilibrio se calculan igualando los payoffs esperados de cada acción

Ejemplo 1: penales

- Estructura que se presta al uso de teoría de juegos
- Ingredientes:
 - 2 jugadores: arquero y ejecutor
 - Juego de suma cero
- Simplificando:
 - Ejecutor: L, C, R
 - Arquero: L, C, R

Estructura de pagos

- $\Pr(A, B)$ es la probabilidad de convertir penal si Ejecutor elige A y arquero elige B
- Patadas ejecutadas con el pie natural son más efectivas. Es más probable que diestro anote si elige L
- $\Pr(L, -) > \Pr(R, -)$
- $\Pr(C, C) = 0$ (el penal es atajado)
- $0 < \Pr(L, L) < \Pr(L, R)$
- $\Pr(C, L) < \Pr(R, L)$

Equilibrio

- No hay equilibrio de estrategias puras
 - Si diestro siempre escoge L, arquero siempre escoge L. Será rentable para ejecutor cambiar a R
- Equilibrio de estrategias mixtas si existe
 - Ambos eligen aleatoriamente
 - Probabilidades fijas que dependen de todas las posibles permutaciones de estrategia
- Propiedad de indiferencia
 - Probabilidad de convertir es la misma independientemente de la estrategia
 - De lo contrario no es equilibrio estable

Implicancias testeables

- El modelo predice aleatoriedad racional, testeable con datos reales
1. Pateador diestro selecciona L con más frecuencia que R
 - Si pateador diestro selecciona L con igual probabilidad que R, arquero no sería indiferente entre L y R, porque la probabilidad de atajar el penal es mayor si elige R
 2. Arquero selecciona L con más frecuencia que R
 - Si arquero selecciona L con igual probabilidad que R, pateador no sería indiferente entre L y R, porque la probabilidad de convertir el penal es mayor si elige L
 3. Arquero escoge L con más frecuencia que pateador
 - Se deriva de lo anterior
 4. Pateador elige C con más frecuencia que el arquero
 - (C,C) es muy costoso para ejecutor. Para que ejecutor esté indiferente entre L, C y R, arquero debe elegir C muy ocasionalmente

Evidencia

Table 5.1 *Observed proportions of penalty kicks, goalkeeper dives and goals*

	Kicker			
Goalkeeper ↓	Left	Centre	Right	Total
<i>Percentages of all penalty kicks classified by kicker and goalkeeper strategies</i>				
Left	25.5	10.5	20.7	56.6
Centre	0.9	0.7	0.9	2.4
Right	18.5	6.1	16.3	41.0
Total	44.9	17.2	37.9	100.0
<i>Percentages of successful kicks for each pairing of kicker and goalkeeper strategies</i>				
Left	63.2	81.2	89.5	76.2
Centre	100.0	0.0	100.0	72.7
Right	94.1	89.3	44.0	73.4
Total	76.7	81.0	70.1	74.9

Source: Adapted from Chiappori, Levitt and Groseclose (2002)

Figure 1:

Elecciones estratégicas

- Modelos dinámicos donde equipos pueden cambiar estrategias continuamente
- Modelos resueltos de atrás a adelante, condicional al estado del partido como sub-juegos no cooperativos
- Ejemplo 2: elección de formación y estilo
 - 1: Defensivo, no violento
 - 2: Defensivo, violento
 - 3: Ofensivo, no violento
 - 4: Ofensivo, violento

Elección de formación y estilo

Table 5.6 *Determination of the two teams' optimal strategies for the first minute*

Expected payoffs after one minute at the start of the match								
	Home team = $h_0^{ij}(0,0,0)$				Away team = $a_0^{ij}(0,0,0)$			
	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4
i = 1	0.8975	0.8953	0.8995	0.8973	0.4975	0.4972	0.4955	0.4952
2	0.8972	0.8950	0.8992	0.8970	0.4953	0.4950	0.4933	0.4930
3	0.8955	0.8933	0.8975	0.8953	0.4995	0.4992	0.4975	0.4972
4	0.8952	0.8930	0.8972	0.8950	0.4973	0.4970	0.4953	0.4950

Note: Payoffs for dominant strategies are highlighted in **bold**

Figure 2:

Elección de formación y estilo

Table 5.4 *Determination of the two teams' optimal strategies for the 90th minute, scores level after 89 minutes*

Expected payoffs after 90 minutes at the start of the 90th minute								
	Home team = $h_{89}^{ij}(0,0,0)$				Away team = $a_{89}^{ij}(0,0,0)$			
	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4
i = 1	1.0075	0.9875	1.0175	0.9975	0.9825	1.0000	0.9725	0.9900
2	1.0250	1.0050	1.0350	1.0150	0.9625	0.9800	0.9525	0.9700
3	0.9975	0.9775	1.0075	0.9875	0.9925	1.0100	0.9825	1.0000
4	1.0150	0.9950	1.0250	1.0050	0.9725	0.9900	0.9625	0.9800

Note: Payoffs for dominant strategies are highlighted in **bold**

Figure 3:

Ejemplo 3: penales antes o después de alargue

- Reglas afectan estrategias
- Modelos simples muestran resultados no triviales
- Equipos A y B eligen nivel de ofensividad: $a, b \in [\underline{c}, \bar{c}]$
- Probabilidad de anotar:

$\alpha(a, b)$ Equipo A elige a

$\beta(a, b)$ Equipo B elige b

- Atacar sube chances de anotar y recibir

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} > 0, \frac{\partial \alpha}{\partial b} > 0, \frac{\partial \beta}{\partial a} > 0, \frac{\partial \beta}{\partial b} > 0$$

- Equipos homogéneos

$$\alpha(c_1, c_2) = \beta(c_2, c_1)$$

- Probabilidad de ganar en tiempo extra:

$$\Pr(A) = \alpha \left(1 - \frac{\beta}{2}\right), \Pr(B) = \beta \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \Pr(O) = (1 - \alpha)(1 - \beta)$$

Ejemplo 3: penales antes o después de alargue

- Pago esperado (expected payoff) de alargue:

- Penales después de alargue

$$V_A^1 = \Pr(A) + \frac{1}{2} \Pr(O) = \frac{1 + \alpha - \beta}{2}, \quad V_B^1 = \Pr(B) + \frac{1}{2} \Pr(O) = \frac{1 + \beta - \alpha}{2}$$

- Penales antes de alargue (asumiendo que gana A en penales)

$$V_A^2 = \Pr(A) + \Pr(O) = 1 - \beta \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad V_B^2 = \Pr(B) = \beta \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

- En ambos casos:

$$\frac{\partial V_A^k}{\partial \alpha}, \frac{\partial V_B^k}{\partial \beta} > 0, \quad \frac{\partial V_A^k}{\partial \beta}, \frac{\partial V_B^k}{\partial \alpha} < 0, \quad k = 1, 2$$

Ejemplo 3: penales antes o después de alargue

- Estrategias:

- Penales después de alargue

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_A^1}{\partial a} \Big|_{a^*} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial a} \Big|_{a^*} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \Big|_{a^*} \\ \frac{\partial V_B^1}{\partial b} \Big|_{b^*} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial b} \Big|_{b^*} = \frac{\partial \alpha}{\partial b} \Big|_{b^*}\end{aligned}$$

- Penales antes de alargue (asumiendo que gana A en penales)

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_A^2}{\partial a} \Big|_{a^{**}} &= 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial \beta}{\partial a} \Big|_{a^{**}}}{\frac{\partial \alpha}{\partial a} \Big|_{a^{**}}} = \frac{\beta(a^{**}, b)}{2 - \alpha(a^{**}, b)} \\ \frac{\partial V_B^2}{\partial b} \Big|_{b^{**}} &= 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial \beta}{\partial b} \Big|_{b^{**}}}{\frac{\partial \alpha}{\partial b} \Big|_{b^{**}}} = \frac{\beta(a, b^{**})}{2 - \alpha(a, b^{**})}\end{aligned}$$

- Bajo algunas condiciones (de segundo orden, concavidad y convexidad):

- Incentivo: A juega a conservar empate (defiende), B juega a romperlo (ataca)

$$a^{**} < a^* = b^* < b^{**}$$

- ¿Cuál de estas modalidades genera mayor agresividad promedio?

$$a^{**} + b^{**} > a^* + b^*$$